Rationale Multiplikationstheoreme automorpher Funktionen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde, vorgelegt der hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

Viktor Krakowski
aus Lodz (Polen)

BASEL
Buchdruckerei Emil Birkhäuser & Cie.
1924

Rationale Multiplikationstheoreme automorpher Funktionen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde, vorgelegt der hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

Viktor Krakowski
aus Lodz (Polen)

BASEL
Buchdruckerei Emil Birkhäuser & Cie.
1924

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. *O. Spiess* und Dr. *H. Mohrmann*.

Basel, den 13. Februar 1923.

Prof. Dr. **A. Buxtorf,** Dekan.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

In verschiedenen Gebieten der Analysis wird man zur Betrachtung der folgenden, in der Literatur nach *Schröder* benannten Funktionalgleichung geführt

$$\Phi(x_1) = m\,\Phi(x), \tag{1}$$

worin m (der Multiplikator) eine Konstante, $\Phi(x)$ und $x_1 = f(x)$ analytische Funktionen bedeuten.

Bedeutet $x = J(t)$ die zu Φ inverse Funktion, so kann man der Beziehung (1) auch die Gestalt

$$J(mt) = f(J(t)) \tag{2}$$

geben. Doch werden wir unsere Betrachtungen bloss an die Form (1) anknüpfen.

Die Aufgabe, welche diese Gleichung (1) stellt, hat einen völlig anderen Charakter, je nachdem $f(x)$ oder $\Phi(x)$ die gesuchte Funktion ist.

I. Ist $\Phi(x)$ *gegeben*, so existiert auch immer $f(x)$ und wird durch den Ausdruck $J(m\,\Phi(x))$ unmittelbar dargestellt, wenn, wie oben, $J(x)$ die Inverse zu $\Phi(x)$ bedeutet. Ein Interesse gewinnt die Aufgabe nur dann, wenn sich $f(x)$ als *algebraische* Funktion ergibt. Man sagt dann, Φ besitze ein Multiplikationstheorem. Alle Funktionen, von denen ein solches Theorem bisher bekannt ist, sind entweder selbst algebraisch oder gehören (wie z. B. die elliptischen Integrale) zur Klasse der linear-polymorphen Funktionen. Das Problem besteht nun darin, aus dem transzendenten Φ das algebraische $f(x)$ herzuleiten.

II. Ist hingegen $f(x)$ *gegeben*, etwa als algebraische Funktion, so ist die Existenz einer zugehörigen Funktion Φ, die man als *Invariante* von $f(x)$ bezeichnen könnte, nicht ohne weiteres selbstverständlich. Koenigs und seine Schüler haben allerdings seit langem gezeigt, dass, wenn $f(x)$ einen Fixpunkt w besitzt, in dem die Ableitung $f'(w)$ nicht gerade $= e^{2\pi i\varrho}$ ist (wo ϱ irrational), alsdann in der Umgebung von w eine analytische Lösung $\Phi(x)$

von Gleichung (1) definiert werden kann. Ist insbesondere $|f'(w)| \neq 1$, so erhält man Φ in Form einer Reihe, die aus den Iterierten von $f(x)$ (oder deren Inversen) in einfacher Weise gebildet ist und die in der Umgebung von w höchstens algebraisch oder (für $f'(w) = 0$) logarithmisch verzweigt ist.

Nun besitzt, wie leicht zu zeigen ist, eine *rationale Funktion* stets mindestens einen Fixpunkt, für den $|f'(w)| > 1$ ist. Für ein rationales $f(x)$ existiert also stets eine Invariante Φ, die in einem zu w gehörigen Gebiet sich regulär verhält. Fragt man aber nach weiteren Eigenschaften dieser Invarianten, z. B. nach den Beziehungen zwischen zu verschiedenen Fixpunkten gehörigen Φ, so erhält man vorläufig keine Antwort, auch nicht bei rationalem $f(x)$, obgleich die Iteration rationaler Funktionen durch neuere Arbeiten von *Julia*[1]) und *Fatou*[2]) mächtige Förderung gefunden hat. Die Aufgabe, von dem algebraischen $f(x)$ aus die Natur des i. A. transzendenten $\Phi(x)$ zu erforschen, erscheint bedeutend schwieriger als das umgekehrte Problem I.

Es ist überhaupt bisher nur in einigen wenigen Fällen gelungen, von einem gegebenen $f(x)$ aus ohne vorherige Kenntnis des Resultats die vollständige Lösung der Gleichung (1) zu erschliessen. Es sind dies, von trivialen Fällen abgesehen, das bekannte Beispiel von Gauss, das aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels entspringt,

$$x_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x},$$

und die beiden nach diesem Muster gebildeten Beispiele

$$x_1 = \sqrt{\frac{x(3-x)}{1+x}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{x(1-x)}{1+x}},$$

die von Prof. Spiess behandelt worden sind[3]). Diese 3 Fälle führen auf Modulfunktionen.

Zu einer fruchtbaren Fragestellung wird man wohl erst gelangen, wenn man, wie beim Problem I, der gesuchten Funktion gewisse Beschränkungen auferlegt. Nach den unter I genannten

---

[1]) Journal de Math. Ser. 4, 1918.

[2]) Bull. Soc. Math. d. France 47 (1919), 48 (1920).

[3]) Spiess, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen. Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. XXVIII, zweiter Teil.

Erfahrungen liegt es nahe, die Forderung zu erheben, dass $\Phi(x)$ die Inverse einer *automorphen* Funktion $J(t)$ sein soll.

Durch diese Forderung wird der Kreis der zu wählenden algebraischen Funktionen erheblich eingeschränkt, und es handelt sich zuerst darum, die algebraischen Bedingungen zu finden, denen dann $f(x)$ notwendig zu genügen hat und die zugleich für die Erfüllbarkeit der Forderung hinreichen. Der *zweite* Schritt besteht alsdann darin, eine solche die Bedingungen erfüllende Funktion $f(x)$ wirklich zu konstruieren, was ein rein algebraisches Problem ist. Endlich — drittens — ist die Substitutionsgruppe der polymorphen Invariante $\Phi(x)$ mit Hilfe von Gleichung (1) aufzustellen, wozu die Methode, die Herr Prof. Spiess im § 3 der zitierten Abhandlung angewandt hat, in jedem Fall ausreichen dürfte, falls kein direkterer Weg zum Ziel führt.

Den soeben skizzierten Gedankengang hat Prof. Spiess neuerdings unter den beiden folgenden Einschränkungen durchgeführt[1]):

1. $f(x)$ *ist rational,*

2. *die linear-polymorphe Funktion ist einwertig und besitzt bloss endlich viele Verzweigungsstellen.*

Anknüpfend an die Gestalt (2) lässt sich dies auch so formulieren: *„Gesucht sind alle eindeutigen automorphen Funktionen mit endlich vielen Gruppenerzeugenden, die ein rationales Multiplikationstheorem besitzen.“*

Dass es solche Funktionen gibt, lehrt das Beispiel der Weierstrass'schen p-Funktion. Die Frage war, ob es noch andere Lösungen gebe. Die Analyse der Gleichung (1) führt auf drei als „typisch“ bezeichnete Bedingungen, die für $f(x)$ zunächst *notwendig* sind. H. Spiess beweist nun, dass diese Bedingungen zugleich *hinreichend* sind, wobei sich das überraschende Resultat ergibt, dass, wenn der Grad von $f(x)$ grösser als 1 ist, die vorige Frage im wesentlichen zu verneinen ist, d. h. *Φ ist notwendig die Umkehrung einer zyklometrischen oder einer elliptischen Funktion.* Nur im Falle eines linearen $f(x)$, für den die angewandte Methode versagt, reicht der Kreis der Lösungen Φ über das Gebiet der elliptischen Funktionen hinaus.

Die Frage, ob für einen vorgegebenen Wert von n Funktionen $f(x)$ existieren, die den genannten 3 Bedingungen genügen, wird

[1]) Spiess, Math. Annalen, Bd. 93.

durch die Theorie der komplexen Multiplikation in bejahendem Sinn beantwortet. Es erhebt sich aber ein spezielles Problem, das damit noch nicht erledigt ist. Nämlich, die typischen Bedingungen für $f(x)$ lassen sich für jeden Grad n zunächst *rein formal* in verschiedener Weise befriedigen, was zu einer Aufzählung von theoretisch möglichen *Typen* führt. Ob sich jeder Typus realisieren lässt, ist a priori nicht einzusehen und bis jetzt auch nicht allgemein bewiesen.

Die vorliegende Arbeit unternimmt es, diese Frage für die niedrigsten Gradzahlen $n = 2$ und $n = 3$ zu beantworten. Das *Resultat* ist, dass es für $n = 2$ sieben, für $n = 3$ elf Typen gibt. Zu jedem Typus existiert tatsächlich ein rationales $f(x)$, das denselben repräsentiert, bei 4 von den Typen geschieht dies sogar auf 2 wesentlich verschiedene Arten.

Die Arbeit gliedert sich im übrigen folgendermassen: In § 1 werden im Anschluss an die letztgenannte Abhandlung von Prof. Spiess eine Anzahl von Begriffsbildungen besprochen, mit deren Hilfe die 3 typischen Bedingungen von $f(x)$ formuliert werden.

In § 2 werden die formalen Schemata aufgezählt, welche die einzelnen Typen definieren und

in § 3 die zugehörigen repräsentierenden Funktionen konstruiert.

Der § 4 ist der Zusammenstellung und Diskussion der Resultate gewidmet.

§ 1.

In den folgenden Betrachtungen treten eine Anzahl von Begriffen und Bezeichnungen auf, mit deren Auseinandersetzung ich beginne.

A. $f(x)$ bedeute stets eine rationale Funktion n-ten Grades, also

$$x_1 = f(x) = \frac{a_0 x^n + \ldots + a_n}{b_0 x^n + \ldots + b_n}, \text{ wo } a_i, b_i \ (i = 0, 1, \ldots n)$$

im allgemeinen komplexe Konstanten sind und $|a_0| + |b_0| > 0$ besteht.

Mit $f(x)$ betrachten wir die ganze Reihe seiner Iterierten

$$(3) \qquad \ldots\ldots x_p, x_{p-1}, \ldots, x_1, x, x_{-1}, \ldots, x_{-p}, \ldots,$$

wobei p stets positiv sein soll.

Es bedeuten ferner $x_p = f_p(x)$ die p-malige Wiederholung der Operation f auf x; $x_{-p} = f_{-p}(x)$ die p-malige Wiederholung der inversen Operation f_{-1} auf x. Offenbar ist $f_{-p}(x)$ zugleich die Inverse von $f_p(x)$. Die $f_p(x)$ sind rational, die $f_{-p}(x)$ algebraisch mehrdeutig. Die Reihe (3) kann aber durch die von Prof. Spiess eingeführte „analytische Iteration längs eines Weges W" bezw. durch Einführung einer Riemann'schen unendlichblättrigen Fläche, auf der sämtliche $f_n(x)$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots.)$ eindeutig sind, eindeutig definiert werden.

Sei ferner a irgend ein Punkt der x-Ebene. Dann verstehen wir unter dem *p-ten Nachfolger* oder *Nachfolger p-ter Stufe* von a den Punkt $a_p = f_p(a)$. Es kann nun vorkommen, dass $a_p = a$ ist; dann heisst *a zyklischer Punkt p-ter Stufe*, falls p der niedrigste Index ist, für den das zutrifft. Einen zyklischen Punkt erster Stufe nennen wir kurz *Fixpunkt.*

Vorgänger p-ter Stufe von a sollen sämtliche Lösungen der Gleichung $f_p(x) = a$ heissen. $f(x)$ besitzt demnach n-Vorgänger erster Stufe (unmittelbare Vorgänger), n^2 Vorgänger zweiter Stufe, ... n^p Vorgänger p-ter Stufe.

B. Ein Punkt a heisst in bezug auf $f(x)$ h-fach oder besitzt *die Multiplizität h*, falls in der Gleichung $f(x) = a_1$ h Wurzeln in a zusammenfallen. Ist $h > 1$, so heisst a ein *mehrfacher Punkt von* $f(x)$ (Abkürzung: M. P.). $f(x)$, als rationale Funktion n-ten Grades, besitzt höchstens $2n - 2$ MP., deren Multiplizitäten der Gleichung genügen

$$\Sigma(h - 1) = 2n - 2$$

wobei sich Σ über alle MP. erstreckt.

C. Neben den MP. von $f(x)$ sind noch diejenigen Punkte von Wichtigkeit, welche *Nachfolger eines MP.* sind. Sie werden hier als *typische Punkte* bezeichnet. Unter den typischen Punkten können sich selbst MP. befinden, es gibt aber notwendig solche MP., die nicht selbst wieder Nachfolger eines anderen MP. sind. Diese *nicht-typischen MP.* werden *primäre* MP. genannt.

D. Schreibt man rechts von dem Zeichen a eines Punktes die Zeichen seiner ersten Vorgänger a_{-1}, a^*_{-1}, ... und verbindet jedes derselben mit a durch soviel Striche, als seine Multiplizität beträgt; verbindet man ebenso die zweiten Vorgänger mit den entsprechenden ersten und fährt so fort, so entsteht eine Figur, welche als *Stammbaum* von a bezeichnet wird.

Irgendeine Reihe von Vorgängern

$$a, a_{-1}, a_{-2}, \ldots .$$

derart, dass jedes $a_{-\nu}$ Nachfolger von $a_{-(\nu+1)}$ ist, soll ein *zu a gehöriger Ast* heissen. Enthält ein Ast einen Zyklus, so heisst er *zyklischer* Ast. Es gibt Fälle, wo der Stammbaum nur aus diesem zyklischen Ast besteht. Er heisse *reiner Zyklus*, der Ast *rein-zyklisch*. Da dann jedes Element dieses Zyklus nur *einen* Vorgänger hat, muss der Zyklus aus lauter n-fachen Punkten gebildet sein. Entweder besteht also im Falle eines rationalen $f(x)$ der Zyklus aus einem einzigen Fixpunkt

$$\boxed{\varrho \overset{(n)}{—} \varrho,}$$

oder aus 2 zyklischen Punkten 2. Stufe

$$\boxed{\varrho \overset{(n)}{—} \varrho' \overset{(n)}{—} \varrho,}$$

denn mehr als $2\,n$-fache Punkte kann eine rationale Funktion n-ten Grades nicht haben.

Das bisher Besprochene möge durch 2 Beispiele illustriert werden.

1. Beispiel.

$$x_1 = \frac{2\,x - 1}{2\,x^2} .$$

Der Stammbaum von ∞ sieht so aus:

$$\boxed{\infty = 0 \begin{array}{l} \diagup \tfrac{1}{2} = 1 \\ \diagdown \infty \end{array}}$$

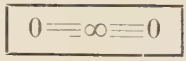
∞, $\frac{1}{2}$ sind einfache Punkte, 0, 1 sind MP., 1 ist primärer MP., ∞, 0, $\frac{1}{2}$ typische Punkte.

$\infty = 0 - \infty$	zyklischer Ast	von ∞
$\infty = 0 - \frac{1}{2} = 1$	nicht-zyklischer Ast	von ∞
$0 - \frac{1}{2} = 1$	” ” ”	von 0.
$0 - \infty = 0$	zyklischer Ast	von 0.

2. Beispiel.

$$x_1 = \frac{1}{x^3} .$$

Der Stammbaum von 0:



ist ein reiner Zyklus.

E. Es werde nun der rationalen Funktion $f(x)$ die Bedingung auferlegt, dass zu ihr eine Invariante $\Phi(x)$ existiere, die der Gleichung (1) genügt und folgende Eigenschaften hat:

a) $\Phi(x)$ ist an endlich vielen Stellen algebraisch oder logarithmisch verzweigt.

Die Zahl der Blätter der zugehörigen Riemann'schen Fläche, die an einer Verzweigungsstelle zusammenhängen, wird hier die *„Höhe"* des Verzweigungspunktes (Abkürzung: VP.) genannt.

b) $\Phi(x)$ nimmt auf der Riemann'schen Fläche jeden Wert nur einmal an.

c) Bei einem Umlauf von x um einen VP. erleidet $\Phi(x)$ eine lineare Substitution.

Diese Eigenschaften charakterisieren bekanntlich $\Phi(x)$ als einwertige polymorphe Funktion. — Es ist nun interessant, dass diese *transzendente* Bedingung äquivalent ist gewissen *rein algebraischen* Bedingungen, so dass es möglich ist, solche $f(x)$ independent von dem $\Phi(x)$ zu berechnen. Indem man nämlich obige Voraussetzungen in ihre Konsequenzen verfolgt, gelangt man zu folgender Einsicht.

1°. *Jeder Nachfolger eines VP. a von $\Phi(x)$ ist wieder ein VP.* — woraus folgt, dass die Reihe $a, a_1, a_2, \ldots$ von einem gewissen Index an zyklisch sein muss.

2°. *Jeder Vorgänger eines VP. a ist wieder ein VP., ausgenommen, wenn jener ein primärer MP. von $f(x)$ ist.*

Daher muss jeder absteigende Ast von a, also

$$a, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \ldots$$

auf einen primären MP. führen, oder er muss zyklisch sein, was wegen der Eindeutigkeit von f nur für einen einzigen Ast zutreffen kann. Da umgekehrt der Nachfolger eines primären MP. ein VP. von Φ sein muss, folgt

3°. *Die VP. von Φ fallen zusammen mit den typischen Punkten von $f(x)$.*

4°. Ist Φ in a unendlich hoch verzweigt, so muss a einem reinen Zyklus (siehe D) angehören. Man folgert daraus leicht, *dass in einem nicht-reinen Zyklus keine MP. vorkommen dürfen.*

5⁰. Ist dagegen Φ in a von endlicher Höhe ν verzweigt, so besteht folgende Beziehung: Ist $a_{-1}, a_{-2}, \ldots . a_{-(p-1)}, a_{-p} (= \varrho)$ irgendein von a absteigender Ast, den man sich durch den primären MP. ϱ abgeschlossen denkt, und sind $h_1, h_2, \ldots . h_p$ die zugehörigen Multiplizitäten, so ist

$$\nu = h_1 \cdot h_2 \ldots . h_p$$

Da ν wegen der regulären Verzweigung einer polymorphen Funktion für ein gegebenes a nur einen Wert hat, folgt, dass der Wert dieses Produkts (das den Namen „*Multiplizität des Astes*" führt) für jeden nicht-zyklischen Ast derselbe ist.

Also: *Die Höhe eines VP. a von Φ ist gleich der Multiplizität irgendeines aufsteigenden Astes von a.*

Wie man sieht, hängen Lage und Höhe der VP. von $\Phi(x)$ lediglich ab von der Lage und den Multiplizitäten der MP. von $f(x)$ und ihrer Nachfolger. Für die letzteren ergeben sich nach dem Obigen die folgenden *notwendigen* Beziehungen, die eben die für unser Problem grundlegenden *typischen Bedingungen* darstellen.

I. *Die Anzahl der typischen Punkte ist endlich.* Dieselben verteilen sich auf eine Anzahl $s > 1$ von Stammbäumen, die zusammen die sogenannte *Stammtafel* von $f(x)$ bilden.

II. *Ein Stammbaum kann aus einem einzigen (zyklischen) Ast bestehen, dessen Elemente n-fache Punkte von $f(x)$ sind.*

III. Hat ein Stammbaum mehr als einen Ast, so gilt:

a) *Ein und nur ein Ast ist zyklisch und besteht aus lauter einfachen Punkten.*

b) *Jeder nicht-zyklische Ast ist durch einen (primären) MP. abgeschlossen.*

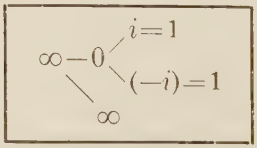
c) *Alle von einem typischen Punkte ausgehenden nicht-zyklischen Äste besitzen dieselbe Multiplizität.*

Zur Illustration führe ich einige den typischen Bedingungen genügende Beispiele an:

1. Beispiel:

$$x_1 = \frac{i(x^2 - 1)}{2x}.$$

Stammtafel

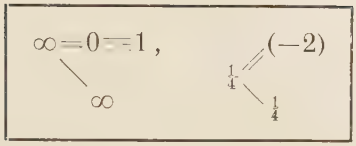


$0, \infty, i, -i$ sind VP. von der Höhe 2.

2. Beispiel:

$$x_1 = -\frac{(x-1)^3}{27\,x^2};$$

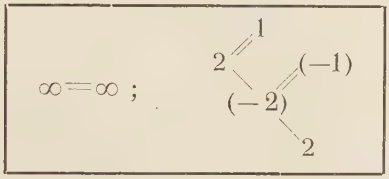
Stammtafel



0, ∞, $\frac{1}{4}$ sind VP. von Φ und zwar ∞ von der Höhe 6
0 „ „ „ 3
$\frac{1}{4}$ „ „ „ 2

3. Beispiel:

$$x_1 = -x^3 + 3\,x$$



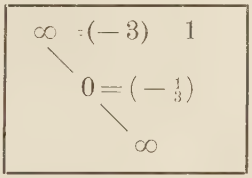
∞ ist VP. von der Höhe ∞; 2 und −2 VP. von der Höhe 2.

Folgende 2 Beispiele verletzen mindestens eine der Bedingungen III.

1. Beispiel: Das 1. Beispiel auf S. 8 verletzt III a.

2. Beispiel:

$$x_1 = \frac{-3\,(3\,x+1)^2}{x\,(x+3)^2}$$



Hier ist die Bedingung III c verletzt.

§ 2. *Die Typen.*

Die typischen Bedingungen, die den Ausgangspunkt unserer weiteren Betrachtungen bilden, enthalten lediglich Aussagen über die formale Konstitution der Stammtafel von $f(x)$, die Zahlwerte der Elemente derselben (der MP. und ihrer Nachfolger) treten nicht darin auf. Wir sagen, dass zwei Stammtafeln demselben *Typus* angehören, wenn sie sich bloss durch die numerischen Werte der Elemente unterscheiden. Ein bestimmter Typus wird durch ein Stammtafelschema dargestellt, dessen Elemente unbestimmte Zeichen sind. Ich wähle im folgenden für die einfachen typischen Punkte die ersten Buchstaben des griechischen Alphabets, für

die MP. das Zeichen ϱ (mit Indizes versehen). Die Aufgabe dieses § ist, für $n=2$ und $n=3$ alle mit den typischen Bedingungen verträglichen Typen aufzustellen. Um alle Möglichkeiten zu erschöpfen, gehen wir nach folgendem System vor. In einer Stammtafel gibt es (mindestens) einen MP. von höchster Multiplizität. Derselbe, etwa ϱ genannt, kann dann

1. selbst einem 1-, 2- oder mehr-gliedrigen Zyklus angehören,
2. oder sein erster Nachfolger kann dies tun,
3. oder sein zweiter, dritter etc. Nachfolger ist in diesem Fall.

Nach diesem Prinzip geordnet ergeben sich die folgenden Typen:

A. für $n=2$.

Es gibt hier zwei MP. je von der Multiplizität 2 (2 Doppelpunkte). Diese können nicht zusammenfallen, da wir sonst einen einzigen Tripelpunkt erhielten, den aber eine rationale Funktion zweiten Grades nicht haben kann.

I $\quad \varrho=\varrho\,,\ \varrho'=\varrho'$

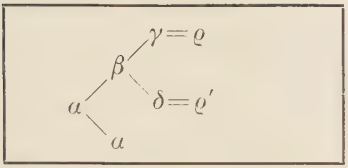
II $\quad \varrho=\varrho'=\varrho$

III $\quad \begin{matrix} & \beta=\varrho & \\ \alpha & & \\ & \alpha & \end{matrix}\ ,\quad \varrho=\varrho$

IV $\quad \begin{matrix} & \beta=\varrho & \\ \alpha & & \\ & \alpha & \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} & \delta=\varrho' & \\ \gamma & & \\ & \gamma & \end{matrix}$

V $\quad \begin{matrix} & \beta=\varrho=\varrho' & \\ \alpha & & \\ & \alpha & \end{matrix}$

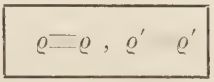
VI $\quad \begin{matrix} & \beta=\varrho & \\ \alpha & & \\ & \gamma & \end{matrix}\ \begin{matrix} & \delta=\varrho' & \\ & & \\ & \alpha & \end{matrix}$

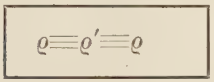
VII 

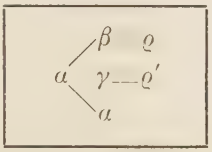
B. für $n = 3$.

Hier haben wir, da $f'(x) = 0$ eine Gleichung vierten Grades ergibt, folgende Fälle zu unterscheiden.

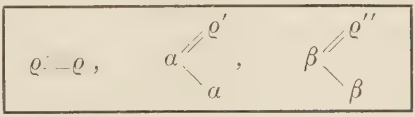
a) *Es gibt 2 MP.* je von der Multiplizität 3, also *2 Tripelpunkte.*

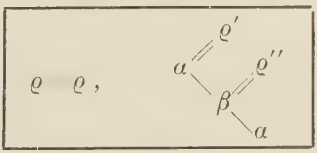
I 

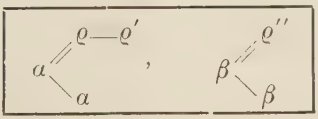
II 

III 

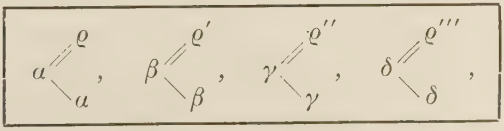
b) *Es gibt 3 MP.*, von denen einer von der Multiplizität 3, die übrigen von der Multiplizität 2 sind, kurz *ein dreifacher* und *2 Doppelpunkte.*

IV 

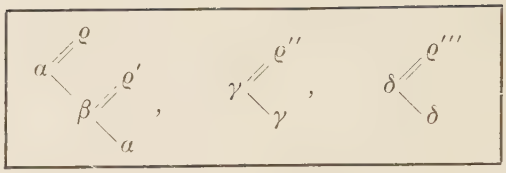
V 

VI 

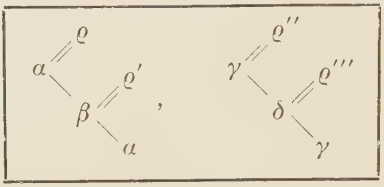
c) *Es gibt 4 MP.* von der Multiplizität 2, *also 4 Doppelpunkte.*

VII 

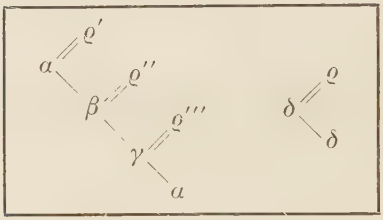
VIII



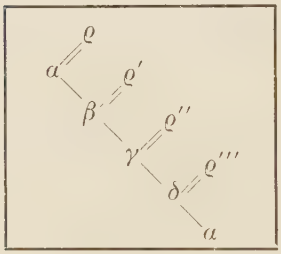
IX



X

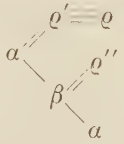


XI



Es ergeben sich also für $n = 2$ sieben Typen; für $n = 3$ elf Typen.

Bemerkung: Es gibt noch mehr Typen, die die Bedingungen I, II, IIIa und IIIb erfüllen, welche aber der Bedingung IIIc nicht genügen, z. B.:



§ 3. *Die repräsentierende Funktion.*

Die Frage ist nun, ob zu jedem der aufgezählten Typen wirklich Funktionen $f(x)$ existieren, deren Stammtafeln demselben angehören. Hiezu schicken wir einige Bemerkungen voraus.

Ist $x_1 = f(x)$ eine zu einem bestimmten Typus gehörige Funktion, so gehören ihm auch alle die Funktionen an, die aus $x_1 = f(x)$ dadurch entstehen, dass man x_1 und x gleichzeitig derselben linearen Substitution

$$x = \frac{a\,y + b}{c\,y + d}\,; \qquad x_1 = \frac{a\,y_1 + b}{c\,y_1 + d}$$

unterwirft. Alle diese Funktionen bilden eine *Klasse*, deren Repräsentant z. B. $x_1 = f(x)$ ist. Von zwei Funktionen derselben Klasse sagen wir: sie sind *linear abhängig* und nennen sie *äquivalent*.

Enthält $f(x)$ komplexe Koeffizienten, und bezeichnet $\bar{f}(x)$ diejenige Funktion, die entsteht, wenn die Koeffizienten ihre konjugierten Werte annehmen, so folgt aus der Gleichung $x_1 = f(x)$ offenbar $\bar{x}_1 = \bar{f}(\bar{x})$, wo $\bar{x}_1$, $\bar{x}$ die konjugierten Grössen zu x_1, x sind. D. h. aber, die Funktion $y_1 = \bar{f}(y)$ entsteht aus $x_1 = f(x)$ durch die (uneigentliche) Substitution $y = \bar{x}$, $y_1 = \bar{x}_1$. Zwei konjugierte Funktionen $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ gehören also als (uneigentlich) äquivalente Funktionen demselben Typus an.

Gehören zu einem Typus k nicht-äquivalente Funktionen, dann sagen wir: *der betreffende Typus hat k Klassen.* Wir können nun die Willkür der a, b, c, d (3 Bedingungen, die die lineare Substitution bestimmen) dazu benützen, um für die Repräsentanten der verschiedenen Klassen eines Typus rechnerisch einfache Formen herauszubekommen. Z. B. ist es praktisch, ∞ als typischen Punkt einzuführen.

Im folgenden werden nach diesem Prinzip geeignete Repräsentanten für sämtliche Typen und Klassen berechnet. Die Resultate sind in der *Tabelle* am Schluss übersichtlich zusammengestellt.

A. *Aufstellung der den Typen I bis VII entsprechenden Repräsentanten zweiten Grades.*

I. Typus: $\boxed{\varrho = \varrho\,;\ \varrho' = \varrho'}$,

Wahl: $\varrho = 0\,;\ \varrho' = \infty$ also $\boxed{0 = 0:\ \infty = \infty}$

Zugehörige Funktion: $\underline{x_1 = x^2}$

II. Typus: $\boxed{\varrho = \varrho' = \varrho}$

Wahl: $\varrho = 0$; $\varrho' = \infty$, also $\boxed{0 = \infty = 0}$

Zugehörige Funktion: $\underline{x_1 = x^{-2}}$

III. Typus: $\boxed{\varrho = \varrho, \quad \alpha \left\langle \begin{array}{l} \beta = \varrho' \\ \alpha \end{array} \right.}$

Wahl: $\varrho = \infty$, $\alpha = 1$; $\varrho' = 0$; also $\boxed{\infty = \infty\ ; \quad 1 \left\langle \begin{array}{l} \beta = 0 \\ 1 \end{array} \right.}$

Ansatz: $x_1 = a\,x^2 + b\,x + c$

Da 0 Doppelwurzel von x_1 ist, so folgt $b = 0$, also $x_1 = a\,x^2 + c$. Wegen $1 = f(x)$, ist $1 + \beta = 0$; andererseits ist $\beta = f(0) = c$, also $c = -1$. Ferner ergibt sich aus $f(1) = 1$, weil 1 Fixpunkt ist: $a = 2$, also

$$\underline{x_1 = 2\,x^2 - 1}$$

IV. Typus: $\boxed{\alpha \left\langle \begin{array}{l} \beta = \varrho \\ \alpha \end{array} \right. , \quad \gamma \left\langle \begin{array}{l} \delta = \varrho' \\ \gamma \end{array} \right.}$

Wahl: $\alpha = \infty$; $\beta = 0$, $\varrho = -1$, also $\boxed{\infty \left\langle \begin{array}{l} 0 = -1 \\ \infty \end{array} \right. , \quad \gamma \left\langle \begin{array}{l} \delta = \varrho' \\ \gamma \end{array} \right.}$

Ansatz: $x_1 = \dfrac{a\,(x+1)^2}{x}$

Der Zähler von x'_1 heisst $a\,(x^2 - 1)$, also $\varrho' = +1$. Wegen $x_1 = f(x)$ ist

(1) $$a\,x^2 - (x_1 - 2\,a)\,x + a = 0$$

Aus $\delta = f(1)$ folgt $\delta = 4\,a$. Andererseits aus (1): $\gamma\,\delta = 1$, also $\gamma = \dfrac{1}{4\,a}$.

Ferner ergibt sich noch aus (1) $\gamma + \delta = -2 + \frac{\gamma}{a}$, oder also $(4a-1)(4a^2+3a+1)=0$, was die Lösungen ergibt: $a = \frac{1}{4}$ (scheidet aus, weil $\gamma \neq 1$) und

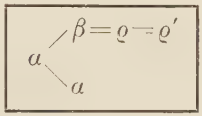
$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{8} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4}\right)^2,$$

also, da konjugierte Funktionen äquivalent sind, *eine* Darstellung:

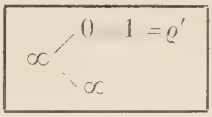
$$x_1 = \left(\frac{2}{1+\sqrt{-7}}\right)^2 \quad \frac{(x+1)^2}{x}$$

(indem wir, wie immer im folgenden, das positive Vorzeichen der Wurzel wählen).

V. Typus:



Wahl: $a = \infty$; $\beta = 0$, $\varrho = 1$, also

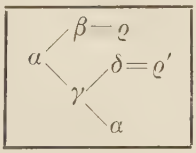


Ansatz: $x_1 = \frac{a(x-1)^2}{x}$

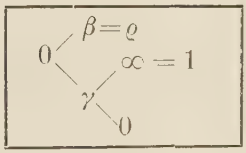
Der Zähler von x'_1: $a(x^2-1)$ liefert für ϱ' den Wert -1. Aus $f(-1)=1$ folgt

$$a = -\frac{1}{4} \quad \text{also} \quad x_1 = -\frac{(x-1)^2}{4x}$$

Typus VI:



Wahl: $a = 0$; $\delta = \infty$, $\varrho' = 1$, also



Ansatz: $x_1 = \frac{\gamma(x-\gamma)(x-\beta)}{(x-1)^2}$

Aus $\gamma = f(0)$ folgt: $\gamma\,\beta = 1$. Es ist wegen $x_1 = f(x)$

$$(\gamma - x_1)\,x^2 - (\gamma^2 + 1 - 2\,x_1)\;x + \gamma - x_1 = 0,$$

woraus wegen $\beta = f(\varrho)$, folgt: $\varrho^2 = 1$ oder $\varrho = -1$ und

$$-2 = \frac{\gamma^2 + 1 - 2\,\beta}{\gamma - \beta}$$

Letztere Gleichung ergibt im Verein mit $\beta\,\gamma = 1$:

$$(\gamma - 1)\,(\gamma^2 + 3\,\gamma + 4) = 0.$$

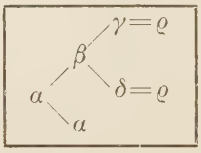
Somit, weil $\gamma = 1$ ausscheidet,

$$\gamma = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}\right)^2$$

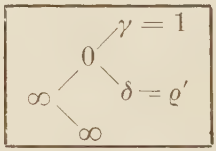
Also *eine* Darstellung:

$$x_1 = \frac{(\gamma\,x - 1)\,(x - \gamma)}{(x-1)^2}$$

VII. Typus:



Wahl: $\alpha = \infty$, $\beta = 0$, $\varrho = 1$, also



Ansatz: $x_1 = \dfrac{\alpha\,(x - \gamma)\,(x - \delta)}{x}$

1 und ϱ' sind Wurzeln der Gleichung: $x^2 - \gamma\,\delta = 0$, woraus $\varrho' = -1$ und $\gamma\,\delta = 1$ folgt. Wegen $x_1 = f(x)$, gilt

$$x^2 - \left(\delta + \gamma + \frac{x_1}{\alpha}\right)x + 1 = 0$$

Für $x_1 = \gamma$ resp. δ hat diese Gleichung die Doppelwurzel 1 resp. -1, daher gelten die Beziehungen

$$2 = \delta + \gamma + \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$-2 = \delta + \gamma + \frac{\delta}{\alpha}$$

Durch Elimination von a ergibt sich aus ihnen:

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta + \gamma - 2}{\delta + \gamma + 2}$$

was im Verein mit $\gamma\,\delta = 1$, die Gleichung

$$\gamma^2 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^2$$

liefert.

1. Fall: $\gamma = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$

Also $\gamma = \pm i$, $\delta = \mp i$ und $a = \dfrac{\gamma - \delta}{4} = \pm\dfrac{i}{2}$.

Wir erhalten somit die eine Darstellung:

$$\underline{x_1 = \frac{i}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

2. Fall: $\gamma = -\dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$

Also $\gamma^2 + 2\gamma - 1 = 0$, was $\gamma = -1 \pm \sqrt{2}$, $\delta = 1 \pm \sqrt{2}$ und $a = \dfrac{\gamma - \delta}{4} = -\dfrac{1}{2}$ ergibt.

Wir erhalten hier zwei äquivalente Darstellungen:

$$\underline{x_1 = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \pm \sqrt{2}}$$

die durch die Substitution $y = -x$, $y_1 = -x_1$ ineinander übergehen.

Die Darstellungen 1. und 2. dieses Typus sind noch auf ihre Unabhängigkeit zu untersuchen. Eine Substitution, die die eine in die andere überführt, müsste die Punkte $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ festlassen, aber die symmetrischen Äste von β, insbesondere $\varrho = 1$ und $\varrho' = -1$ vertauschen. Die entsprechende Substitution $x = -x'$, $x_1 = -x'_1$ transformiert aber jede der konjugierten Darstellungen des Falles 1 in sich, vertauscht dagegen die beiden Lösungen des Falles 2. Wir haben somit zwei Klassen. Damit ist der Fall $n = 2$ erledigt.

B. *Aufstellung der den Typen I bis XI entsprechenden Repräsentanten dritten Grades.*

a) *mit 2 MP.*

I. Typus: $\varrho \equiv \varrho\,, \quad \varrho' \equiv \varrho'$

Wahl: $\varrho = 0$; $\varrho' = \infty$, also $0 \equiv 0\,, \quad \infty \equiv \infty$

Zugehörige Funktion: $x_1 = x^3$.

II. Typus: $\varrho \equiv \varrho' \equiv \varrho$

Wahl: $\varrho = 0\,, \quad \varrho' = \infty$, also $0 \equiv \infty \equiv 0$

Zugehörige Funktion: $x_1 = x^{-3}$

III. Typus: $\alpha \begin{cases} \beta \equiv \varrho \\ \gamma \equiv \varrho' \\ \alpha \end{cases}$

Wahl: $\alpha = \infty$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$ $\quad \infty \begin{cases} 1 \equiv \varrho \\ -(-1) \equiv \varrho' \\ \infty \end{cases}$

Ansatz: $x_1 = 1 + \dfrac{a(x-\varrho)^3}{x^2-1}$

ϱ und ϱ' sind Doppelwurzeln von $x'_1 = 0$:

$$(x-\varrho)^2\ (x^2 - 2\,x\,\varrho - 3) = 0$$

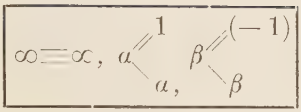
also $\varrho^2 + 3 = 0$ und $\varrho' = -\varrho$. Somit $\varrho = \sqrt{-3}$, $\varrho' = -\sqrt{-3}$

Aus $-1 = f(\varrho')$ erhält man sofort $a = \dfrac{-\sqrt{-3}}{9}$

Also $x_1 = \dfrac{x\,(x^2-9)}{3\sqrt{-3}\,(x^2-1)}$

b) *mit 3 MP.*

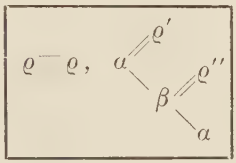
IV. Typus: $\varrho \equiv \varrho\,, \quad \alpha \begin{cases} \varrho' \\ \alpha\,, \end{cases} \quad \beta \begin{cases} \varrho'' \\ \beta \end{cases}$

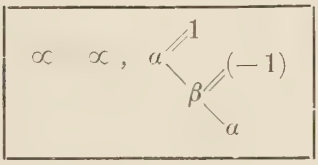
Wahl: $\varrho = \infty$, $\varrho' = 1$, $\varrho'' = -1$, also 

Ansatz: $x_1 = a\,x^3 + b\,x + c$.

x'_1 heisst $3\,a\,x^2 + b$. Da 1 und -1 MP. sind, also x'_1 für sie verschwindet, muss 1) $b = -3\,a$ sein. Anderseits muss für $x_1 = a$ die Gleichung $f(x) - a = 0$ die Doppelwurzel 1 haben. Da in ihr das Glied mit x^2 fehlt, folgt $a + 2 = 0$. Analog ergibt sich für $x_1 = \beta : \beta - 2 = 0$. Somit $-2 = f(1) = a + b + c$ und $2 = f(-1) = -a - b + c$, woraus schliesslich $c = 0$ und 2) $a + b = -2$. Aus 1) und 2) folgt noch $a = 1$, $b = -3$, also

$$\underline{x_1 = x^3 - 3\,x}$$

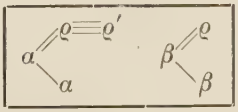
V. Typus: 

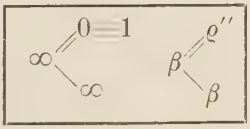
Wahl: $\varrho = \infty$, $\varrho' = 1$, $\varrho'' = -1$, also 

Ansatz: $x_1 = a\,x^3 + b\,x + c$, woraus wieder 1) $b = -3\,a$ folgt. Da $\alpha = 2$, $\beta = -2$ ist, folgt, wegen $-2 = f(-1)$ und $2 = f(1)$, $c = 0$ und $a + b = 2$, was mit 1) $a = -1$, $b = 3$ ergibt.

Also

$$\underline{x_1 = -x^3 + 3\,x}$$

VI. Typus: 

Wahl: $\alpha = \infty$; $\varrho = 0$, $\varrho' = 1$, also 

Ansatz: $x_1 = \dfrac{a\,(x-1)^3}{x^2}$

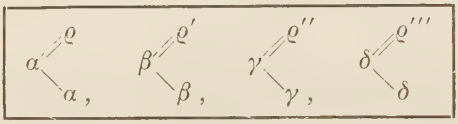
Der Zähler von x'_1 heisst $x\,(x-1)^2\,(x+2)$, also ist $\varrho'' = -2$, folglich $\beta = -\dfrac{27\,a}{4}$.

Andererseits ist, wegen $\beta = f(x)$, da diese Gleichung die einfache Wurzel β und die Doppelwurzel ϱ'' hat, $\beta\,\varrho''^2 = 1$, also $4\,\beta$ oder $\beta = \dfrac{1}{4}$ und $a = -\dfrac{1}{27}$

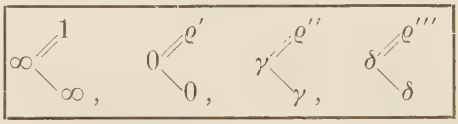
Somit: $\underline{x_1 = -\dfrac{(x-1)^3}{27\,x^2.}}$

c) *mit 4 MP.*

VII. Typus:



Wahl: $a = \infty$, $\varrho = 1$, $\beta = 0$, also



Ansatz: $x_1 = \dfrac{a(x-\varrho')^2 x}{(x-1)^2}$

ϱ'' und ϱ''' sind Wurzeln der Gleichung $x^2 + (\varrho' - 3)\,x + \varrho' = 0$

$$\text{also (1)} \quad \begin{cases} \varrho'' + \varrho''' = 3 - \varrho' \\ \varrho''\,\varrho''' = \varrho' \end{cases}$$

Andererseits ist wegen $x_1 = f(x)$

$$a\,x^3 - (2\,a\,\varrho' + x_1)\,x^2 + (a\,\varrho'^2 - 2\,x_1)\,x - x_1 = 0$$

Aus $\gamma = f(x)$ bezw. $\delta = f(x)$ ergeben sich

$\gamma\,\varrho''^2 = \dfrac{\gamma}{a}$, also $\varrho''^2 = \dfrac{1}{a}$; bezw.: $\delta\,\varrho'''^2 = \dfrac{\delta}{a}$, also $\varrho'''^2 = \dfrac{1}{a}$

Hieraus folgt aber $\varrho'' = -\varrho'''$. Also aus (1)

$$\varrho' = 3 \text{ und } \varrho''^2 = -3 = \frac{1}{a},$$

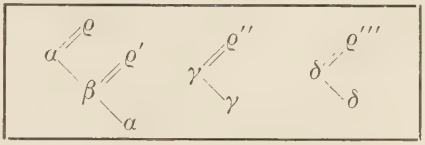
$$\text{somit } a = -\frac{1}{3}, \quad \varrho'' = \sqrt{-3}, \quad \varrho''' = -\sqrt{-3}$$

Folglich erhalten wir

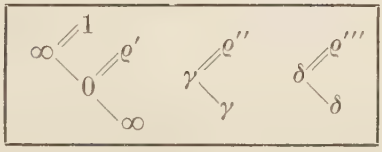
$$x_1 = -\frac{(x-3)^2\, x}{3\,(x-1)^2}$$

Die Substitution $y = 1 - x$, $y_1 = 1 - x_1$ führt diese Funktion über in die einfachere $y_1 = -\dfrac{y^3 - 4}{3\,y}$, für welche β, γ, δ dritte Einheitswurzeln sind.

VIII. Typus:



Wahl: $\alpha = \infty$, $\beta = 0$, $\varrho = 1$, also



Ansatz: $x_1 = \dfrac{a(x-\varrho')^2}{x\,(x-1)^2}$

ϱ'' und ϱ''' sind Wurzeln der Gleichung

(1) $$x^2 + x\,(1 - 3\,\varrho') + \varrho' = 0$$

d. h. (1′) $$\begin{cases} \varrho'' + \varrho''' = 3\,\varrho' - 1 \\ \varrho''\,\varrho''' = \varrho' \end{cases}$$

Es ist, wegen $x_1 = f(x)$

(2) $$x_1\, x^3 - (2\,x_1 + a)\, x^2 + (x_1 + 2\,a\,\varrho')\, x - a\,\varrho'^2 = 0$$

Also, wegen $\gamma = f(x)$ und $\delta = f(x)$, die die einfachen Wurzeln γ resp. δ und die Doppelwurzel ϱ'' resp. ϱ''' besitzen:

(3) $\gamma\,\varrho''^2 = \dfrac{a\,\varrho'^2}{\gamma}$ und $\delta\,\varrho'''^2 = \dfrac{a\,\varrho'^2}{\delta}$, woraus, wegen (1′) folgt:

(3′) $\gamma^2\,\delta^2 = a^2\,\varrho'^2$

Andererseits ist $\delta\,\gamma = f(\varrho'')\,f(\varrho''') = a^2\,\varrho$, was wegen (3′), $a^2 = 1$ ergibt, also $a = \pm 1$.

1. Fall: $a = +1$

Aus (3) erhält man: $\gamma^2 = \varrho'''^2$ und $\delta^2 = \varrho''^2$, woraus notwendig, da δ, γ keine MP. sind: (4) $\gamma = -\varrho'''$ und $\delta = -\varrho''$ sich ergibt.

Wegen (2) bestehen noch die Beziehungen

$$\gamma + 2\,\varrho'' = \frac{2\,\gamma + 1}{\gamma}$$

$$\delta + 2\,\varrho''' = \frac{2\,\delta + 1}{\delta}$$

die nach erfolgter Addition, wegen (4), in $(\varrho' - 1)\,(3\,\varrho' + 1) = 0$ übergehen.

Weil nun $\varrho' \neq 1$ ist, erhält man

$$\varrho' = -\frac{1}{3}, \quad \varrho'' = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3}, \quad \varrho''' = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}$$

Somit $$\underline{x_1 = \frac{(3\,x + 1)^2}{9\,x\,(x - 1)^2}}$$

2. Fall: $a = -1$

Aus (3) erhält man: $\gamma^2 = -\varrho'''^2$ und $\delta^2 = -\varrho''^2$, also notwendig, wegen $\delta\gamma = \varrho$, $(3'')$ $\gamma = \pm i\,\varrho'''$, $\delta = \mp i\,\varrho''$. Wir wählen die oberen Zeichen, da die unteren nur eine uneigentlich äquivalente Lösung ergeben würden.

Aus (2) folgen:

$\gamma^2 + 2\,(\varrho'' - 1)\;\gamma + 1 = 0$ und $\delta^2 + 2\,(\varrho''' - 1)\;\delta + 1 = 0$

die wegen (1′) und (3″) schliesslich für ϱ' die Gleichung

$$9\,\varrho'^2 - 2\,\varrho' + 1 = 0$$

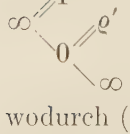
ergeben. Wir erhalten somit

$$\varrho' = \frac{1 \pm 2\,i\sqrt{2}}{9} = -\left(\frac{1}{1 \pm \sqrt{-2}}\right)^2$$

Also bekommt man die Darstellung

$$\underline{x_1 = -\frac{(x - \varrho')^2}{x\,(x - 1)^2}}$$

Hier gibt es eine Substitution, welche den Stammbaum



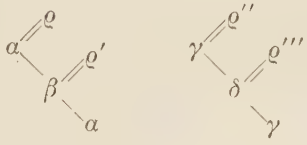
in sich transformiert, nämlich $y = \frac{\varrho'}{x}$, $y_1 = \frac{\varrho'}{x_1}$, wodurch $(\infty, 1)$ mit $(0, \varrho')$ vertauscht werden. Jede der Gleichungen in den Fällen (1.) und (2.) geht dabei in sich über; die Darstellungen repräsentieren also verschiedene Klassen.

Für den zweiten Fall ist in die Tabelle eine Darstellung aufgenommen, welche aus der vorigen durch die Substitution

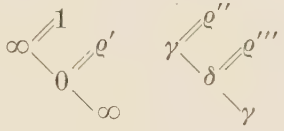
$$x \Big/ \frac{-x}{1+\sqrt{-2}} \qquad x_1 \Big/ \frac{-x_1}{1+\sqrt{-2}}$$

entsteht.

IX. Typus:



Wahl: $a = \infty$, $\beta = 0$ und $\varrho = 1$, also



Ansatz: $x_1 = \dfrac{a\,(x-\varrho')^2}{x\,(x-1)^2}$

Wie beim Typus VIII gilt hier

(1′) $$\varrho'' + \varrho''' = 3\,\varrho' - 1 \text{ und } \varrho''\,\varrho''' = \varrho'$$

Wegen $x_1 = f(x)$ besteht

$$x_1\,x^3 - (2\,x_1 + a)\,x^2 + (x_1 + 2\,a\,\varrho')\,x - a\,\varrho'^2 = 0$$

woraus wegen $\gamma = f(x)$ und $\delta = f(x)$ folgt:

(2) $$\delta\,\varrho''^2 = \frac{a\,\varrho'^2}{\gamma} \text{ und } \gamma\,\varrho'''^2 = \frac{a\,\varrho'^2}{\delta}$$

Hieraus aber ergibt sich $\varrho''^2 = \varrho'''^2$, also $\varrho'' = -\varrho'''$. Somit, wegen (1′): $\varrho' = \dfrac{1}{3}$, $\varrho'' = \dfrac{\sqrt{-3}}{3}$, $\varrho''' = -\dfrac{\sqrt{-3}}{3}$

a bestimmt sich auf folgende Weise:
es ist (aus (2)):

(3) $$\gamma \cdot \delta = \frac{a\,\varrho'^2}{\varrho''^2} = -\frac{a}{3}$$

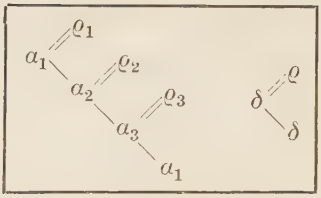
Andererseits ist

(4) $$\gamma \cdot \delta = f(\varrho'')\,f(\varrho''') = f(\varrho')\,f(-\varrho'') = \frac{a^2(\varrho''^2 - \varrho'^2)^2}{-\varrho''^2(\varrho''^2-1)^2} = \frac{a^2}{3}$$

Aus (3) und (4) erhält man $a = -1$

Somit $$\underline{x_1 = -\frac{(3\,x-1)^2}{9\,x\,(x-1)^2}}$$

X. Typus:



Die Bezeichnung der Elemente ist aus praktischen Gründen gegenüber § 2 (Schluss) geändert.

Wir wählen $\delta = \infty$, $\varrho = 0$ und behalten uns die dritte Bedingung noch vor. Nach dem Ansatz:

$$x_1 = a\left(x + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x_2}\right) \tag{1}$$

werden die ϱ_k Wurzeln der Gleichung:

$$\varrho^3 - c\,\varrho - 2\,d = 0$$

und es gilt

$$\sum \varrho_k = 0\,, \quad \sum \varrho^2{}_k = 2\,c\,, \quad \sum \frac{1}{\varrho_k} = -\frac{c}{2\,d}\,, \quad \sum \frac{1}{\varrho^2{}_k} = \frac{c^2}{4\,d^2}. \tag{2}$$

Nun hat für

$$x_1 = a_k = a\left(\varrho_k + b + \frac{c}{\varrho_k} + \frac{d}{\varrho_k{}^2}\right) = a\left[\frac{3}{2}\,\varrho_k + b + \frac{c}{2\,\varrho_k}\right] \tag{3}$$

die Gleichung (1) die Wurzeln a_{k+1}, ϱ_k, ϱ_k und also ist

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{\varrho_k} - \frac{1}{2}\,\varrho_k \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$a_k - a\,a_{k+1} = a\,(2\,\varrho_k + b) \tag{5}$$

Wir summieren jetzt diese letzten Gleichungen über $k = 1, 2, 3$, wobei wir setzen

$$\sum a_k = -3\,\lambda\,, \quad \sum a^2{}_k = 3\,\mu\,, \quad 2\sum a_k\,a_{k+1} = 9\,\lambda^2 - 3\,\mu$$

Wir erhalten so unter Verwendung der Formeln (2)

$$\frac{c^2}{4\,d} = 3\,\lambda \tag{6}$$

$$a\,b = (a-1)\,\lambda \tag{7}$$

Wir summieren nun über das Quadrat von (4) und finden

$$c = 9\,\lambda^2 - 3\,\mu \tag{8}$$

Damit berechnen wir weiter die Summe über das Quadrat von (5) und das Produkt von (4) und (5), was auf

(9) $$[9\,a^2 + a + 1]\,\mu = (25\,a^2 + a + 1)\,\lambda^2$$ und

(10) $$-\mu = (4\,a - 1)\,\lambda^2$$ führt.

Die Kombination dieser letzten Gleichungen führt endlich zu

(11) $$4\,\lambda^2\,(9\,a^2 + 5\,a + 1) = 0$$

Erster Fall: $\lambda = 0$, gibt sofort $b = 0$, $c = 0$, $2\,a_{k+1} = -\varrho_k$, $8\,a^3{}_k + 2\,d = 0$.

Wählen wir jetzt $d = -4$, so dürfen wir setzen $a_1 = 1$, $a_2 = \varepsilon^2$, $a_3 = \varepsilon$, und finden $a = -\frac{2}{3}$

Also wird

a) $$x_1 = -\frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{x^3 - 4}{x^2}$$

Zweiter Fall:

$$\lambda \neq 0\,, \quad 9\,a^2 + 5\,a + 1 = 0, \quad a = \left(\frac{m}{3}\right)^2, \quad \text{wo } m = \frac{1 + \sqrt{-11}}{2}$$

Damit ergibt sich, wenn man noch $\lambda = 3$ wählt, die Funktion

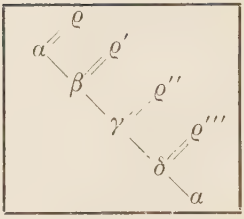
b) $$x_1 = \frac{m^2}{9} \cdot \frac{x^3 + 3\,(m^2 + 6)\,x^2 + 6\,(2\,m^2 + 9)\,x + (2\,m^2 + 9)^2}{x^2}$$

Da nach (4) $a_{k+1} = -\frac{d}{\varrho_k{}^2}$ ist und $\varrho_k{}^3 - 6\,h\,\varrho - 2\,h^2 = 0$ ist, wenn $h = 2\,m^2 + 9 = (4 + \sqrt{-11})$ bedeutet, so findet man leicht, dass die a_k die Wurzeln der Gleichung sind

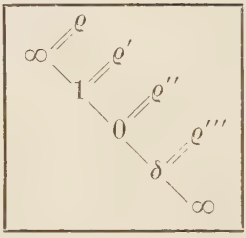
$$x^3 + \left(3\,x + \frac{h}{2}\right)^2 = 0$$

Eine Substitution, welche die Gleichung a) in b) überführen würde, müsste die Punkte 0, ∞ festlassen, also von der Form sein: $x = k\,y$, $x_1 = k\,y_1$. Da die Werte, in welche die a_k hiebei übergehen, die Summe 0 behalten, während sie in $X_b = -9$ ist, so ist dies unmöglich. Die beiden Darstellungen des Typus X gehören also verschiedenen Klassen an.

XI. Typus:



Wahl: $\alpha = \infty,\ \beta = 1,\ \gamma = 0,$ also



Ansatz: $x_1 = \dfrac{\delta\,(x-\delta)\,(x-\varrho'')^2}{(x-1)\,(x-\varrho)^2}$

Nach x geordnet erhält man die Gleichung

(A) $$(\delta - x_1)\,x^3 - [\delta\,(2\,\varrho'' + \delta) - (2\,\varrho + 1)\,x_1]\,x^2 + [(\varrho''^2 + 2\,\varrho''\,\delta)\,\delta - x_1\,(\varrho^2 + 2\,\varrho)]\,x - (\delta^2\,\varrho''^2 - \varrho^2\,x_1) = 0.$$

ϱ' und ϱ''' sind Wurzeln von

(B) $$[\delta - 1 + 2\,(\varrho'' - \varrho)]\,x^2 + (3\,\varrho - 3\,\delta\,\varrho'' + \delta\,\varrho - \varrho'')\,x + (2\,\delta\,\varrho'' - 2\,\delta\,\varrho - \varrho\,\varrho'' + \delta\,\varrho\,\varrho'') = 0,$$

was sich aus dem Nullsetzen des Zählers von x'_1 ergibt.

Aus $1 = f(0)$ erhält man $\varrho^2 = \delta^2\,\varrho''^2$, also haben wir 2 Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: (1) $\underline{\varrho = \delta\,\varrho''}$

(A) erhält für $x_1 = \delta$ die Doppelwurzel $x = \varrho'''$, dies gibt mittels (1) die beiden Relationen

(2) $$2\,\varrho''' = \frac{\varrho''^2(1+\delta)}{2\,\varrho'' - 1} \quad \text{und} \quad (2')\ \varrho'''^2 = \frac{\delta\,\varrho''^2}{2\,\varrho'' - 1}$$

Analog erhält man für $x_1 = 1$ aus (A) für die Doppelwurzel $x = \varrho'$

(3) $$2\,\varrho' = \delta + 1$$

Addiert man (2) und (3) und berechnet $\varrho' + \varrho'''$ aus (B) unter Berücksichtigung von (1), so ergibt sich

(4) $$\varrho'' = -1$$

Durch Elimination von ϱ''' aus (2) und (2') ergibt sich wegen (4) für δ die Gleichung

(D) $$\delta^2 + 14\,\delta + 1 = 0$$

oder $\delta = -7 \pm 4\sqrt{3}$ und $\varrho = -\delta = 7 \mp 4\sqrt{3}$

Also

$$x_1 = \frac{\omega^2\,(x+\omega^2)\,(x+1)^2}{(1-x)\,(x-\omega^2)^2},$$

wobei $$\omega = 2 \mp \sqrt{3}$$

Dass hier zwei äquivalente Darstellungen vorliegen, ersieht man hieraus. Unterwirft man $x_1 = f(x)$ der Substitution, die ∞ in 1, 1 in 0 und δ in ∞ überführt, nämlich

$$y = \frac{x-1}{x-\delta}, \quad y_1 = \frac{x_1 - 1}{x_1 - \delta}$$

so geht 0 in ein $\delta^* = \frac{1}{\delta}$ über, d. h., die den beiden Wurzeln von (D) entsprechenden Lösungen $f(x, \delta)$, $f(x, \delta^*)$ vertauschen sich. (Die Substitution $x/\omega x$, $x_1/\omega x_1$ ergibt die Funktion der Tabelle.)

2. Fall: $\varrho = -\delta\varrho''$

Ähnlich wie im Fall 1. findet man

$$\varrho'' = \pm i$$

Wir wählen $\varrho'' = +i$, da $\varrho'' = -i$ eine uneigentlich äquivalente Lösung ergibt. Für δ ergibt sich dann der Wert:

$$3 + 2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$$

Also

$$x_1 = \frac{\omega^2\,(x-\omega^2)\,(x-i)^2}{(x-1)\,(x+i\,\omega^2)^2}$$

wobei $\omega = 1 + \sqrt{2}$ ist. (Ersetzen von i durch $(-i)$ und darauf folgende Substitution $x/i\,\omega x$, $x_1/i\,\omega x_1$ ergibt die Funktion der Tabelle.)

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Fälle 1. und 2. nicht-äquivalent sind. Dies folgt aber schon daraus, dass die im Fall 1 besprochene Substitution jeden einzelnen Fall in eine in ihm enthaltene Funktion überführt. Damit ist auch der Fall $n = 3$ erledigt.

§ 4.

Nachdem nun für jeden Typus die Existenz eines $f(x)$ durch dessen wirkliche Aufstellung erwiesen worden ist, wenden wir uns der Aufsuchung der zugehörigen Φ zu.

Wie bereits in § 1 erwähnt ist, sind die VP. von Φ identisch mit den typischen Punkten von $f(x)$, und die Höhe ν eines algebraischen VP. ist gleich der Multiplizität eines zugehörigen Astes. Geht man nun die einzelnen Typen des § 2 durch, so sieht man, dass 1. die Anzahl der VP. entweder $= 2$, $= 3$, oder $= 4$ ist und 2. die Summe ihrer reziproken Höhen (also $\Sigma \frac{1}{h}$, erstreckt über alle VP.) den 3 Fällen entsprechend die Werte 0, 1 oder 2 hat.

Dieser Umstand lässt vermuten, dass Φ ein zyklometrisches Integral, oder ein Integral, das eine Dreiecksfunktion darstellt, oder ein elliptisches Integral sein wird.

Herr Prof. Spiess (l. c.) hat die Richtigkeit dieser Vermutung für jedes $n > 1$ bewiesen. Aus den oben gefundenen Formeln lässt sich dieses Resultat im einzelnen bestätigen.

Bezieht sich nämlich das Produktzeichen Π auf alle im Endlichen gelegenen typischen Punkte a von $f(x)$, so erkennt man, dass der Differenzialquotient

$$(1) \qquad \frac{\Pi (x_1 - a)^{\frac{1}{\nu} - 1}}{\Pi (x - a)^{\frac{1}{\nu} - 1}} \cdot \frac{dx_1}{dx} = \text{einer Konstanten } m \text{ wird.}$$

Bezeichnet ω einen Fixpunkt von $f(x)$, so genügt daher

$$(2) \qquad \Phi (x) = \int_{\omega}^{x} \Pi (x - a)^{\frac{1}{\nu} - 1} dx$$

der Gleichung $\Phi (x_1) = m \, \Phi (x)$.

Die nachfolgende Tabelle enthält zu jedem $f(x)$ die Stammtafel, die zugehörige Invariante Φ und den Multiplikator m.

Zu dieser Tabelle ist folgendes zu bemerken.

a) In den Fällen

$$n = 2 : \text{I, II, III}$$
$$n = 3 : \text{I, II, IV, V}$$

ist der Multiplikator eine ganze Zahl (2 resp. 3). Die zugehörigen $f(x)$ liefern ersichtlich Multiplikationstheoreme für die Funktionen: *arc sin*, *arc cos* und *log*.

b) Die Integrale in

$$n = 2 : \text{V}$$
$$n = 3 : \text{III, VI}$$

bilden bekanntlich ein geradliniges Dreieck auf eine Halbebene konform ab. Sie gehen durch die unten angegebenen Substitutionen in elliptische Integrale über.

c) Die übrigen $\Phi(x)$ sind elliptische Integrale erster Art, die durch eine ganze lineare Substitution in die Weierstrass'sche Normalform übergehen. Folglich liefern die zugehörigen $f(x)$ Multiplikationstheoreme für gewisse ganze lineare Funktionen der p-Funktion.

d) Die auftretenden Multiplikatoren sind aus der Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen bekannt. Man erhält sie in dieser Theorie direkt dadurch, dass man die Gradzahl auf alle möglichen Arten in einem imaginär quadratischen Körper K $(\sqrt{-D})$ in ein Produkt zweier konjugierter Faktoren zerlegt. Man hat also die Gleichungen

$$n = x^2 + Dy^2 \text{ und } n = \frac{x^2 + Dy^2}{4}$$

in ganzen Zahlen x, y, D (> 0) zu lösen. Es ist dann

$$m = x + y\sqrt{-D} \text{ resp. } = \frac{x + y\sqrt{-D}}{2}$$

Dies gibt

für $n = 2$				für $n = 3$		
D	1	2	3	2	3	11
m	$1 + i$	$\sqrt{-2}$	$\frac{1 + \sqrt{-7}}{2}$	$1 + \sqrt{-2}$	$\sqrt{-3}$ und $\varepsilon\sqrt{-3}$	$\frac{1 + \sqrt{-11}}{2}$

Die Integrale der *Tabelle* verteilen sich auf diese verschiedenen Multiplikatoren in folgender Weise:

$n=2$			$n=3$		
$\sqrt{-2}$	$1+i$	$\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$	$\sqrt{-3}$	$\varepsilon\sqrt{-3}$	$\frac{1+\sqrt{-11}}{2}$
VII_b	V, VII_a	IV, VI	VI VII, IX $VIII_a$, XI_a	III, X_a	X_b

e) Zum Schluss betrachten wir noch kurz die Beziehungen, die zwischen den einzelnen Funktionen $f(x)$ unserer Tabelle bestehen. Die Vertreter derjenigen Typen nämlich, deren Multiplikatoren gleich sind oder sich bloss durch eine Einheitswurzel unterscheiden, lassen sich in mannigfacher Weise ineinander transformieren, und zwar braucht man dazu sowohl *lineare* als auch *höhere rationale* und *irrationale* Substitutionen. Wir betrachten diese verschiedenen Fälle.

A. *Lineare Transformation.*

α) Durch eine simultane *gleichartige* Substitution

$$x = \lambda(y),\ x_1 = \lambda(y_1)$$

kann die Gleichung $x_1 = f(x)$ nur in eine Gleichung $y_1 = g(y)$ vom *selben* Typus übergehen. Man kann stets von der Identität verschiedene Substitutionen angeben, die die Gleichung $x_1 = f(x)$ in sich selbst überführen. Die Stammbäume der Stammtafel vertauschen sich dabei unter sich oder gehen einzeln in sich über.

Beispiel: VII ($n=3$) für $\lambda(y) = \varepsilon y$ sowie $\lambda(y) = \frac{y+2}{y-1}$

β) Bedeutet $d\Phi(x) = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ das Differenzial der Invariante von $f(x)$, so gilt

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} = m \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

Setzt man nun $x =$ einer solchen Substitution $\lambda(y)$, welche die Wurzeln von $R(x)$ paarweise vertauscht, so geht

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ in } \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}$$

über. Durch die *ungleichartige* Substitution $x = \lambda(y)$, $x_1 = y_1$ erhält man also eine Funktion $y_1 = g(y)$, für welche ebenfalls gilt

$$\frac{dy_1}{\sqrt{R(y_1)}} = m \cdot \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}$$

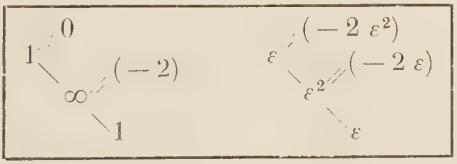
Dabei wird aber meist $g(y)$ von anderm Typus sein als $f(x)$ und daher durch eine gleichartige Substitution in den Repräsentanten dieses zweiten Typus übergehen. Die Transformation des einen $f(x)$ in das andere hat also schliesslich die Gestalt

$$x = \lambda(y), \quad x_1 = \mu(y_1)$$

wo $\lambda \neq \mu$ ist und wird deshalb hier „ungleichartig" genannt. Auf diese Weise lassen sich gegenseitig überführen:

$(n = 2)$	$(n = 3)$
I und II	I und II
IV „ VI	IV „ V
	VII „ IX
	$VIII_a$ „ XI_a
	$VIII_b$ „ XI_b

Beispiel: Die Stammtafel von VII ($n = 3$) geht durch $x_1 = y_1$, $x = \dfrac{y+2}{y-1}$ über in die folgende



die vom Typus IX ist. Die Substitution $x_1 = 1 - 3z_1$, $x = \dfrac{z-1}{z}$ führt direkt Nummer VII der Tabelle in IX über.

Dagegen führt die Substitution $x_1 = y_1$, $x = \varepsilon y$ die Funktion VII in Xa über. Der Multiplikator wird hiebei ein anderer, was daher kommt, dass $\dfrac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}} = \dfrac{\varepsilon\, dy}{\sqrt{y^3 - 1}}$ wird. Damit sind die linearen Beziehungen zwischen den $f(x)$ erschöpft.

B. *Höhere rationale Transformation.*

Setzt man in der Gleichung $x_1 = f(x)$ des Typus VIIIa $x = y^2$, $x_1 = {y_1}^2$, so lässt sich die Wurzel ausziehen und man erhält je nach Wahl des Vorzeichens die Funktionen

$$y_1 = \frac{3y^2 + 1}{3y(y^2 - 1)} \quad \text{und} \quad y_1 = -\frac{3y^2 + 1}{3y(y^2 - 1)}$$

von denen die erste dem Typus VII, die zweite dem Typus IX angehört. Die gleichartigen Substitutionen zweiten Grades $x = \lambda(y)$, $x_1 = \lambda(y_1)$, wo für

$$\lambda(y) = \alpha\left(\frac{y - (1 - \sqrt{3})}{y - (1 + \sqrt{3})}\right)^2 \text{resp.} = \alpha\left(\frac{\sqrt{3} \cdot y - 1}{\sqrt{3} \cdot y + 1}\right)^2, \quad \alpha = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$$

zu nehmen ist, führen die Funktion VIIIa direkt in die Repräsentanten von VII resp. IX über. Ich stelle hier die einfachsten nichtlinearen Substitutionen $\lambda(y)$ zusammen, die zur Verwandlung der Typen notwendig sind, unter denen sich auch 2 irrationale befinden. Es führt über:

$\lambda(y)$	für $n = 2$	$n = 3$
y^2	IV in VI V „ VII_a	$VIII_a$ in IX oder VII $VIII_b$ „ $VIII_b$ IX „ XI_a
$\frac{y + y^{-1}}{2}$	III in I	
$y + y^{-1}$		IV in I
$y - y^{-1}$		V „ I
$\frac{y^3}{4}$		VI „ VII oder X_a
$\sqrt{1 - 4y}$		III in VI
$\sqrt{4 - y^2}$		IV „ IV od. V

Durch Kombination dieser Transformation mit den linearen lassen sich alle möglichen Übergänge herstellen. Der Zusammenhang der Typen und ihrer Repräsentanten dürfte hiemit genügend geklärt sein.

Tabelle

	Typus	Repräsentanten	Stammtafel	Invariante $\Phi(x)$	Multiplikator m
$n=2$	I	$x_1 = x^2$	$0 = 0\,, \qquad \infty = \infty$	$\log x$	2
	II	$x_1 = \dfrac{1}{x^2}$	$0 = \infty = 0$	$\log x$	-2
	III	$x_1 = 2x^2 - 1$	$\infty = 0\,, \qquad 1 \lessdot \begin{matrix}(-1)=0\\(1)\end{matrix}$	$\arccos x$	2
	IV	$x_1 = \dfrac{(x+1)^2}{m^2 x}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}0=(-1)\\ \infty\end{matrix}\,, \qquad \dfrac{1}{\overline{m}^2} \lessdot \begin{matrix}\overline{m}^2=1\\ \dfrac{1}{\overline{m}^2}\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x\left(x^2 - \dfrac{3\overline{m}^3}{4}x + 1\right)}}$	$\dfrac{1+\sqrt{-7}}{2}$
	V	$x_1 = -\dfrac{(x-1)^2}{4x}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}0=1=(-1)\\ \infty\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-1)^2}}$	$1+i$
	VI	$x_1 = \dfrac{(x-m^2)(m^2x-1)}{(x-1)^2}$	$0 \lessdot \begin{matrix}\overline{m}^2=(-1)\\ m^2 \lessdot \begin{matrix}\infty=1\\ 0\end{matrix}\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x\left(x^2 - \dfrac{3\overline{m}^3}{4}x + 1\right)}}$	$\dfrac{1+\sqrt{-7}}{2}$
	a) VI	$x_1 = -\dfrac{i}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$	$\infty - 0 \lessdot \begin{matrix}(-i)=1\\ (i)=(-1)\\ \infty\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(x^2+1)}}$	$1+i$
	b) VI	$x_1 = -\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{2}$	$\infty - 0 \lessdot \begin{matrix}(\sqrt{2}-1)=1\\ (\sqrt{2}+1)=(-1)\\ \infty\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1)}}$	$\sqrt{-2}$
$n=3$	I	$x_1 = x^3$	$0 \equiv 0\,, \qquad \infty \equiv \infty$	$\log x$	3
	II	$x_1 = \dfrac{1}{x^3}$	$0 \equiv \infty \equiv 0$	$\log x$	-3
	III	$x_1 = \dfrac{x(x^2-9)}{3\sqrt{-3}(x^2-1)}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}1 \equiv \sqrt{-3}\\ (-1) \equiv (\sqrt{-3})\\ \infty\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$	$\sqrt{-3}$
	IV	$x_1 = x^3 - 3x$	$\infty \equiv \infty\,, \quad (-2) \lessdot \begin{matrix}1\\ (-2)\end{matrix}\,, \quad 2 \lessdot \begin{matrix}(-1)\\ 2\end{matrix}$	$\arccos \dfrac{x}{2}$	3
	V	$x_1 = -x^3 + 3x$	$\infty \equiv \infty\,, \quad 2 \lessdot \begin{matrix}1\\ (-2) \lessdot \begin{matrix}(-1)\\ 2\end{matrix}\end{matrix}$	$\arcsin \dfrac{x}{2}$	3
	VI	$x_1 = -\dfrac{(x-1)^3}{27x^2}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}0 \equiv 1\\ \infty\end{matrix}\,, \qquad \dfrac{1}{4} \lessdot \begin{matrix}(-2)\\ \dfrac{1}{4}\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt[6]{x^4\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^3}}$	$\sqrt{-3}$
	VII	$x_1 = \dfrac{4-x^3}{3x^2}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}0\\ \infty\end{matrix}\,, \quad 1 \lessdot \begin{matrix}(-2)\\ 1\end{matrix}\,, \quad \varepsilon \lessdot \begin{matrix}(-2\varepsilon)\\ \varepsilon\end{matrix}\,, \quad \varepsilon^2 \lessdot \begin{matrix}(-2\varepsilon^2)\\ \varepsilon^2\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$	$\sqrt{-3}$
	a) VIII	$x_1 = -\dfrac{(3x+1)^2}{9x(x-1)^2}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}1 \lessdot \begin{matrix}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\\ 0\end{matrix}\\ \infty\end{matrix}\,, \quad \alpha \lessdot \begin{matrix}(-\alpha)\\ \alpha\end{matrix}\,, \quad \bar{\alpha} \lessdot \begin{matrix}(-\alpha)\\ \bar{\alpha}\end{matrix}$ $\left[\alpha = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x\left(x^2 - 2x - \dfrac{1}{3}\right)}}$	$\sqrt{-3}$
	b) VIII	$x_1 = -\dfrac{(mx-1)^2}{x(x+m)^2}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}(-m)\\ 0 \lessdot \begin{matrix}1\\ m\end{matrix}\\ \infty\end{matrix}\,, \quad (-i\varrho) \lessdot \begin{matrix}\bar{\varrho}\\ (-i\varrho)\end{matrix}\,, \quad (i\varrho) \lessdot \begin{matrix}\varrho\\ (i\bar{\varrho})\end{matrix}$ $[\varrho = 1 + \sqrt{2}]$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(x^2 + 2\sqrt{-2}x - 1)}}$	$1+\sqrt{-2}$
	IX	$x_1 = -\dfrac{(3x-1)^2}{9x(x-1)^2}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}1\\ 0 \lessdot \begin{matrix}\dfrac{1}{3}\\ \infty\end{matrix}\end{matrix}\,, \quad \left(\dfrac{1}{1-\varepsilon}\right) \lessdot \begin{matrix}\dfrac{1}{\sqrt{-3}}\\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\\ \left(\dfrac{1}{1-\varepsilon^2}\right)\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x\left(x^2 + x + \dfrac{1}{3}\right)}}$	$\sqrt{-3}$
	a) X	$x_1 = \dfrac{\varepsilon(4-x^3)}{3x^2}$	$1 \lessdot \begin{matrix}(-2\varepsilon^2)\\ \varepsilon^2 \lessdot \begin{matrix}(-2\varepsilon)\\ \varepsilon \lessdot \begin{matrix}(-2)\\ 1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\,, \quad \infty \lessdot \begin{matrix}0\\ \infty\end{matrix}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$	$\varepsilon\sqrt{-3}$
	b) X	$x_1 = \left(\dfrac{m}{3}\right)^2 \dfrac{x^3 + 3(m+3)x^2 + 6hx + h^2}{x^2}$ $[h = 2m+3]$	$\alpha \lessdot \begin{matrix}\varrho\\ \alpha' \lessdot \begin{matrix}\varrho'\\ \alpha'' \lessdot \begin{matrix}\varrho''\\ \alpha\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\,, \quad \infty \lessdot \begin{matrix}0\\ \infty\end{matrix}$ $[\varrho^3 - 6h\varrho - 2h^2 = 0]$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^3 + \left(3x + \dfrac{h}{2}\right)^2}}$	$\dfrac{1+\sqrt{-11}}{2}$
	a) XI	$x_1 = -\dfrac{(x+\varrho)(\varrho x+1)^2}{(\varrho x-1)(x-\varrho)^2}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}\varrho\\ \varrho' \lessdot \begin{matrix}(-1)\\ 0 \lessdot \begin{matrix}(-\bar{\varrho})\\ (-\varrho) \lessdot \begin{matrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \infty\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}$ $[\varrho = 2 + \sqrt{3}]$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(x^2 + 2\sqrt{3}x - 1)}}$	$\sqrt{-3}$
	b) XI	$x_1 = \dfrac{(x+i\varrho)(\varrho x+1)^2}{(i\varrho x-1)(x-\varrho)^2}$	$\infty \lessdot \begin{matrix}\varrho\\ (i\bar{\varrho}) \lessdot \begin{matrix}(-m)\\ 0 \lessdot \begin{matrix}\bar{\varrho}\\ (-i\varrho) \lessdot \begin{matrix}\dfrac{1}{m}\\ \infty\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}$ $[\varrho = 1 + \sqrt{2}]$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(x^2 + 2\sqrt{-2}x - 1)}}$	$1+\sqrt{-2}$

Unter ε ist $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ verstanden. Der Querstrich über m, α, ϱ deutet die conjugierte Grösse an.

VITA.

Ich, Viktor Krakowski, wurde am 13. Mai 1895 als Sohn des Kaufmanns Herschlik Krakowski und seiner Gattin, Rosa (†) geb. Schidlowska, in Lodz (Polen) geboren.

Von 1901 besuchte ich daselbst eine Vorschule und von 1905 das Goetzen'sche Progymnasium. 1908 trat ich in das polnische Gymnasium meiner Heimatstadt über, musste aber 1912 auf Wunsch meines Vaters dasselbe verlassen. 1913 ging ich ins Ausland, um meine unterbrochenen Studien wieder aufzunehmen. 1914 bestand ich die schweizerische Reifeprüfung und immatrikulierte mich im W.-S. an der Universität Zürich, wo ich als Hauptfach Mathematik studierte. S.-S. 1918 liess ich mit exmatrikulieren, mit der Absicht, in Basel die Studien abzuschliessen. 1921 S.-S. immatrikulierte ich mich daselbst und begann die Vorbereitungen für die vorliegende Arbeit zu treffen.

Mit herzlichem Danke gedenke ich der Herren Dozenten, an deren Vorlesungen oder Übungen ich teilnahm: Bernays, Greinacher, Hurwitz, Matthies, Meyer, Mohrmann, Pfeiffer, Ratnowsky, Spiess, Weiler, Wolfer, Zermelo. Auch habe ich vorschriftsmässig im physikalischen und chemischen Praktikum gearbeitet.

Herrn Prof. Dr. O. Spiess, der die vorliegende Dissertation angeregt hat und unter dessen Leitung sie ausgeführt wurde, spreche ich für sein Wohlwollen und die wertvollen Ratschläge meinen ganz besonderen Dank aus.

Gegenwärtig wirke ich als Mathematiklehrer am Lyceum Alpinum in Zuoz.